ДОДАТОК
Завдання для самостійної роботи з елементами дистанційного навчання з дисципліни «Теорія оптимального управління»

Види та форми контрольних заходів з перевірки самостійної роботи студентів, критерії оцінювання

Контроль за виконанням самостійної роботи студентами здійснюється у двох формах:

- за допомогою електронних засобів (електронною поштою);
- шляхом проведення письмової модульної контрольної роботи.

Під час самостійної роботи студенти мають вивчити запропоновані питання визначених тем та виконати дві практичні роботи.

Теми для самостійного опрацювання

Тема 1. Постановка задач оптимального керування, приклади задач оптимального керування. Структурні схеми систем керування

Тема 2. Математична постановка задач оптимального керування. Дослідження існування та єдиності узагальнених розв'язків диференційних рівнянь з розривними правими частинами.

Тема 3. Постановка та дослідження задач керованості для нестаціонарних та стаціонарних систем. Критерій керованості для стаціонарних і нестаціонарних лінійних систем. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування.

Практичне заняття № 1.

Тема 4. Спостережуваність в системах керування. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування.

Практичне заняття № 2

Тема 5. Ідентифікація параметрів систем керування. Керованість, спостережуваність, ідентифікація дискретних систем керування.

Загальні постановки задач для виконання практичних

робіт

Практичне заняття № 1. Керованість лінійних систем.

Приклад 1.1. Дослідити систему на цілком керованість.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 + u \end{cases}.$$

Розв'язок. Запишемо дану систему в матрично-векторній формі.

Маємо: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u$.

Отже, тут $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

За необхідною й достатньою умовою цілком керованості маємо:

$$\det(b, Ab) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = 0 \times 4 - 1 \times 1 \neq 0 .$$

Таким чином, система є цілком керованою.

Приклад 1.2. Дослідити систему на цілком керованість.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2u \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u .$$

Розв’язок.

За необхідною і достатньою умовою цілком керованості

$$\det(b, Ab) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-8) - 0 \cdot 2 = -16 \neq 0 .$$

Система є цілком керованою.

Приклад 1.3. Дослідити систему на цілком керованість.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 - u_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} .$$

Розв’язок.

Тут маємо $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad rang(B, AB) = rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

За необхідною та достатньою умовою цілком керованості система є цілком керованою.

Приклад 1.4. Визначити, при яких λ, b_1, b_2, b_3 система керування, що задається матрицею

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ та вектором $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, є цілком керованою.

<u>Розв'язок</u>. Після проведення необхідних матрично-векторних обчислень умова цілком керованості виглядає так:

$$\det(b, Ab, A^2 b) = \det\begin{pmatrix} b_1 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda^2 b_1 + 2\lambda b_2 + b_3 \\ b_2 & \lambda b_2 + b_3 & \lambda^2 b_2 + 2\lambda b_3 \\ b_3 & \lambda b_3 & \lambda^2 b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= b_3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & b_2 & 2\lambda b_2 + b_3 \\ 0 & b_3 & 2\lambda b_3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} =$$

$$= b_3 \cdot \det\begin{pmatrix} b_2 & 2\lambda b_2 + b_3 \\ b_3 & 2\lambda b_3 \end{pmatrix} = b_3(2\lambda b_2 b_3 - 2\lambda b_2 b_3 - b_3^2) = -b_3^3 \neq 0$$

Отже, система цілком керована при $b_3 \neq 0$ та довільних λ, b_1,b_2.

Завдання для самостійної роботи.

1.5. При яких значеннях параметру p система є цілком керованою

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + (p-3)x_2(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + (p^2 - p)u_1(t) \end{cases}$$

1.6. Визначити при яких a, b, c система керування, що задається матрицею

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ та вектором $b = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, є цілком керованою.

1.7. Дослідити систему на цілком керованість

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t) + 2u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + u_1(t) - u_2(t) \end{cases}$$

1.8. Дослідити систему на цілком керованість

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t) \end{cases}$$

1.9. Дослідити систему на цілком керованість залежно від параметра c .

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2 = x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t) + cu(t) \end{cases}$$

Практичне заняття № 2. Спостережуваність лінійних систем.

Приклад 2.1. Дослідити систему на цілком керованість та спостережуваність:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u\,, \quad y = (1,0) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$$

<u>Розв'язок.</u> Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q^T = (1,0)\,.$$

Отже, $$A \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(b, Ab) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \neq 0\,,$$

тобто система є цілком керованою.

Для дослідження на цілком спостережуваність скористаємося необхідною й достатньою умовами цілком спостережуваності. Оскільки

$$q^T A = (1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1)\,, \; A^T q = (q^T A)^T = (0,1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

і, згідно з умовою, $q = (1,0)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

тобто $\det(q, A^T q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

Отже, система є цілком спостережуваною.

Приклад 2.2. Дослідити систему на цілком керованість та цілком спостережуваність:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u\,, \quad y = (0,1) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\,.$$

<u>Розв'язок.</u>
Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q^T = (0,1)\,.$$

Звідси $$A \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(b, Ab) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \neq 0$$

Тобто система є цілком керованою.

Далі

$q^T A = (0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0)$, $A^T q = (0,0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q = (0,1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тоді $\det(q, A^T q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$ система не є цілком спостережуваною.

Приклад 2.3. Дослідити систему на спостережуваність та відновити вектор фазових координат, якщо це можливо

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 17 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y(t) = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

Розв'язок. Маємо $q^T = (-3, -2, -1)$.

Знаходимо $A^T q = (-18, -14, -7)^T$,

$$(A^T)^2 q = A^T (A^T q) = (-123, -89, -49)^T .$$

Тоді $\det \tilde{S}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -18 & -123 \\ -2 & -14 & -89 \\ -1 & -7 & -49 \end{pmatrix} = -27 \neq 0 \quad \Rightarrow$

система є спостережною і ми можемо відтворити вектор фазових координат.

Відтворення фазових координат проводиться за формулою

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\tilde{S}_3^T)^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Для чого зробимо наступні обчислення (зважаючи на те, що похідні від фазових координат беруться в силу заданої системи)

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) = -3\dot{x}_1(t) - 2\dot{x}_2(t) - 3\dot{x}_3(t) = \\ = -3(x_1(t) + 3x_2(t)) - 2(-x_1(t) + 3x_2(t) + 4x_3(t)) - \\ -3(17x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)) = \\ = -18x_1(t) - 14x_2(t) - 7x_3(t) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \ddot{y}(t) = -18\dot{x}_1(t) - 14\dot{x}_2(t) - 7\dot{x}_3(t) = \\ = -123x_1(t) - 89x_2(t) - 49x_3(t) \end{gathered}$$

На останньому кроці обчислимо матрицю $(\tilde{S}_3^T)^{-1}$, дописавши з права до $\tilde{S}_3^T$ одиничну 3×3 матрицю і виконавши необхідні перетворення Жордана-Гауса до тих пір поки не з'явиться одинична 3×3 матриця з ліва. Остаточно запишемо

$$B=(\tilde{S}_3^T)^{-1}=\begin{pmatrix}-7/3 & 1/3 & 0\\ 7/9 & -8/9 & 1/9\\ 40/9 & 7/9 & -2/9\end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи.

2.4. Дослідити систему на спостережуваність та відновити вектор фазових координат, якщо це можливо

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)+9x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=2x_1(t)+3x_2(t)\end{cases}$$
$$y(t)=x_1(t)+2x_2(t)$$

2.5. Дослідити систему на спостережуваність та відновити вектор фазових координат, якщо це можливо

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=2x_1(t)+10x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=3x_1(t)+x_2(t)\end{cases}$$
$$y(t)=3x_1(t)+x_2(t)$$

2.6. Дослідити систему на спостережуваність та відновити вектор фазових координат, якщо це можливо

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=2x_1(t)+2x_2(t)+x_3(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)+x_2(t)-x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=2x_1(t)+2x_2(t)-2x_3(t)\end{cases}$$
$$y(t)=2x_1(t)-2x_2(t)+3x_3(t)$$

2.7. Дослідити на цілком керованість та спостережуваність в залежності від a, b

$$\ddot{x}(t)+a^2\dot{x}(t)+bx(t)=0$$

$$y(t)=x(t)$$
$$\dot{y}(t)=\dot{x}(t)$$

2.8. Дослідити систему на спостережуваність в залежності від параметра a. n - порядковий номер студента в списку групи. Зафіксувавши значення параметра, відновити вектор фазових координат, якщо це можливо

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=3x_1(t)+nx_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=2x_1(t)+nx_2(t)\end{cases}$$
$$y(t)=ax_1(t)+x_2(t)$$

2.9. Дослідити систему на спостережуваність в залежності від параметра a. Зафіксувавши значення параметра, відновити вектор фазових координат,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -n \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y(t) = nx_1 + ax_2 + 3x_3 ,$$

$$n = \begin{cases} 1, & \textit{прізвище студента починається з А – Д} \\ 2, & \textit{прізвище студента починається з Е – К} \\ 3, & \textit{прізвище студента починається з Л – П} \\ 4, & \textit{прізвище студента починається з Р – Ф} \\ 5, & \textit{прізвище студента починається з Х – Я} \end{cases}$$

2.10. Дослідити систему на спостережуваність в залежності від параметра значення a.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -ax_1(t) \end{cases}$$

$$y_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$$

$$y_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

..

Деякі приклади будуть надані студентам індивідуально.